اندرکنش سد و مخزن در قلمرو زمان*

ساناز محمودپور[۱] — رضا عطارنژاد[۲]

چکیده *در این مقاله تحلیل دقیق پویای اندرکنش سد و مخزن در قلمرو زمان انجام می‌شود. ضخامت بدنه سد، متغیر و سازه سد، انعطاف‌پذیر و مخزن تا بی‌نهایت ادامه دارد. شرایط مرزی تشعشعی در مخزن و تغییر شکل بدنه سد به دقت در رابطه‌سازی گنجانده شده‌اند تا همه بعدهای پدیده فیزیکی اندرکنش سد و مخزن را دربربگیرند. فشار هیدروپویای در پشت سد ازمعادله فشار موج پیروی می‌کند. الگوسازی سازه سد به صورت اویلر- برنولی و با فرض قائم بودن بدنه در بالادست انجام پذیرد. روش نوینی برای تحلیل تیر با مقطع متغیر ارایه می‌شود. این روش نوین بر مبنای کاربرد تابع‌های نوینی است که تابع‌های شکل مبنا (BDFs) نام دارند. این تابع‌ها از حل معادله دیفرانسیل حرکت تیر اویلر- برنولی با مقطع متغیر به دست می آیند و با کمک آن‌ها تابع‌های شکل پویای نوینی حاصل می‌شوند که در تحلیل تیرهای با مقطع متغیر به کار می‌روند. پاسخ پویای سد و مخزن در برابر زلزله ال سنترو بررسی و تغییر مکان سد در حالت مخزن پر وخالی محاسبه شده است. مقایسه نتیجه‌های حاصل با نتیجه‌های موجود در نوشته‌های فنی، نشان‌دهنده شایستگی و دقت روش ارایه شده است.*

واژه‌های کلیدی اندرکنش سد و مخزن، تحلیل در قلمرو زمان، ضخامت متغیر، تابع‌های شکل مبنا (BDFs)

Dam Reservoir Interaction in Time Domain

S. Mahmoudpour R. Attarnejad

Abstract *In the paper a dynamic exact solution in the time domain for dynamic analysis dam-reservior interaction is presented. The dam structure is flexible with infinite reservoir Exact consideration of the radiation boundary condition of the infinite reservoir and deformation of dam structure are included in the formulation which explicitly expresses the physical phenomena of fluid-structure system. The hydrodynamic pressure in the fluid domain of the structure-reservoir system is assumed to be governed by the pressure wave equation. The upstream face of the dam is considered vertical. The dam structure is modeled as a cantilever Euler-Bernoulli beam. The thickness of the dam is assumed to be variable. A new method for analysis of non-prismatic beams is presented. This new method is based on using new functions namely Basic Displacement Functions (BDFs).These functions are obtained by solving the governing equation of motion of a non-prismatic Euler-Bernoulli beam. Using this method dynamic shape functions are efficiently obtained for non-prismatic beams. Interactive behavior of the dam-reservoir system with different geometrical properties is demonstrated by numerical examples when the system is subjected to ramp acceleration and El Centro earthquake ground motions. The results are compared with those of literature and the competency of the method is shown in both economy and exactness.*

Key Words Dam-Reservoir Interaction, Time Domain Analysis, Variable Section, Basic Displacement Functions (BDFs)

---

*نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۸۸/۱۱/۱۰ و نسخه‌ی نهایی آن در تاریخ ۸۹/۱۱/٤ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول، دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشکده عمران، دانشگاه تهران

(۲) عضو هیئت علمی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران

مقدمه

برای بررسی پاسخ پویای سد در برابر زلزله بایستی سامانه سد و مخزن را هم‌زمان مورد تحلیل و بررسی قرار داد. این سامانه شامل سازه سد و دریاچه پشت سد می‌باشد. روش‌های گوناگونی برای تحلیل سازه سد و مخزن به کار می‌روند. در این بخش، نخست درباره روش‌هایی که در حل مخزن به کار گرفته شده‌اند، توضیح داده می‌شود و سپس روش نوینی برای تحلیل اندرکنش سد و مخزن معرفی خواهد شد.

توزیع فشار هیدرودینامیک را برای نخستین بار وسترگارد در سال ۱۹۳۳ بر روی سدهای صلب ارایه داد [1]. در سال ۱۹۶۷، Chopra، یک روش تحلیلی برای توزیع فشار هیدرودینامیک روی یک سد صلب با بدنه قائم پیشنهاد کرد [2]. در سال ۱۹۷۸ Chwang با چشم‌پوشی از فشردگی پذیری سیال، رابطه‌سازی فشار هیدرودینامیک برای سدهای صلب با دیواره بالادست مایل با زاویه ثابت را ارایه داد [3]. Mei در سال ۱۹۷۹ یک روش دقیق برای حل مسأله اندرکنش سازه و سیال در قلمرو بسامد به‌دست آورد [4]. در سال ۱۹۸۶ Liu با گسترش رابطه‌سازی Chwang یک روش دقیق برای سدهای صلب و بدنه شیب‌دار و مخزن مثلثی ارایه کرد[5].

تحلیل اندرکنش سد و مخزن با روش‌های عددی مختلفی انجام می‌پذیرد. روش‌هایی مانند جزءی محدود، جزءی مرزی، جزءی نامحدود و روش تفاضل محدود از جمله روش‌هایی هستند که در تحلیل مسأله اندرکنش مورد توجه قرار گرفته‌اند. Fenves و Chopra در سال ۱۹۸۴ یک برنامه رایانه‌ای بر مبنای روش جزءی محدود برای تحلیل مسأله اندرکنش سد و مخزن ارایه دادند [6]. در سال ۱۹۹۰ Cheng و Niu تحلیل لرزه‌ای سد- مخزن و فونداسیون را با روش جزءی مرزی انجام دادند[7]. در سال ۱۹۹۱ Estroff و Antes با ترکیب روش جزءی محدود و جزءی مرزی یک روش بر اساس گام‌های زمانی برای تحلیل اندرکنش سد – مخزن پیشنهاد کردند [8]. Yerli و Kacin در سال ۲۰۰۳ برای تحلیل دو بعدی اندرکنش سد- مخزن، روشی بر مبنای جزءی محدود و نامحدود پایه نهادند [9]. در سال ۲۰۰۴، Kuchukarsalan اندرکنش سد- مخزن- فونداسیون را در قلمرو زمان با روش تقابل دوگانه جزء مرزی (DRBEM) (Dual Reciprocity Boundary Element Method) مورد بررسی قرار داد. او از این روش برای الگوسازی مخزن و پی بهره گرفت و الگوی سد را با جزء محدود تشکیل داد [10]. Soares و Mansur در سال ۲۰۰۶ اندرکنش خاک-سیال- سازه را با روش جزء مرزی مورد بررسی قرار دادند [11]. در سال ۲۰۰۷ Millan، Young و Prevost اثرگذاری هندسه مخزن را بر پاسخ پویای سامانه خاک- سیال- سازه در قلمرو بسامد مطالعه کردند و روش المان مرزی را در تحلیل به کار بردند [12]. در سال ۲۰۰۸ Gerstenberger و Wall با کمک از روش اجزای محدود گسترش یافته (XFEM) به بررسی مسأله اندرکنش سیال- سازه پرداختند [13]. Hung و Wang با روش تفاضل محدود فشار هیدرودینامیک غیر خطی وارد بر سد صلب را تعیین کردند [14]. Hung و Chen این روش را برای تعیین فشار هیدرودینامیک وارد بر سد انعطاف‌پذیر گسترش دادند [15]. Chen با فرض سد صلب و کاربرد روش تفاضل محدود، مقدار فشار هیدروپویای را برای مخزن با شکل دلخواه محاسبه کرد [16].

برای تحلیل اولیه و نیز وارسی نتیجه‌ها از روش‌های ساده شده وابسته به حل بسته استفاده می‌شود. در سال (۱۹۹۰-۱۹۹۱) Tsai و Lee یک روش نیمه تحلیلی برای حل مسأله اندرکنش سد و مخزن در حالت دوبعدی و سه بعدی در قلمرو زمان ارایه کردند. در این روش مرز دوردست در بی‌نهایت فرض شده و فشار هیدرودینامیک در مخزن از معادله فشار موج پیروی می‌کند. سد به صورت تیر اویلر- برنولی با مقطع ثابت فرض شده و رابطه‌سازی ارایه شده بر این اساس استوار است [17,18]. از تحلیل سازه سد، ویژگی‌های پویای

سد، بسامدهای طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی، برای کاربرد در حل مسأله اندر کنش به دست می‌آیند. از آن‌جایی که سازه سد با مقطع ثابت فرض شده است، حل معادله دیفرانسیل حرکت، به‌سادگی و از روش جداسازی متغیرها صورت می‌پذیرد. در عمل، سدها دارای مقطع‌های متغیر در ارتفاع می‌باشند. به همین دلیل برای موردهای کاربردی، الگوسازی سد باید به شکل تیر با مقطع متغیرانجام پذیرد که در این حالت تحلیل تیر و حل معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت آن نسبت به حالت مقطع ثابت پیچیده‌تر می‌باشد.

فرساد و عطارنژاد در سال ۲۰۰۳ با گسترش روش تسای [18]، روشی نیمه تحلیلی برای بررسی مسأله اندرکنش در حالتی که ضخامت سد متغیر باشد ارایه دادند [۱۹]. در سال ۲۰۰٦ ، رحمتی و عطارنژاد به تحلیل اندرکنش سد و مخزن در قلمرو زمان به صورت نیمه تحلیلی با روش تابع اولیه‌گیری حلقوی منفرد مجزا (DSC) پرداختند. سازه سد با یک تیر طره با مقطع ثابت و مخزن به صورت یک محیط همگن غیر چسبنده نیمه بی نهایت الگوسازی شد [۲۰].

در مقاله حاضر توزیع فشار هیدرودینامیک و حل معادله موج با توجه به روش ارایه شده در مرجع [18] در نظر گرفته شده است و روش نوینی برای تحلیل سازه سد ارایه خواهد شد. در این رویکرد با درنظرگرفتن سازه سد به صورت تیر با مقطع متغیر الگوسازی انجام می‌شود. روش نوین پیشنهادی برای تحلیل تیرها با مقطع متغیر ارایه بر پایه کاربرد تابع‌های نوینی به نام "تابع‌های شکل مبنا (Basic Displacement Functions (BDFs))" می‌باشد. این تابع‌ها از حل معادله دیفرانسیل حرکت تیراویلر – برنولی با مقطع متغیر به دست می آیند. با این تابع‌ها ویژگی‌های پویای (بسامد ها و مودهای ارتعاشی) تیرها با مقطع متغیر محاسبه می‌شوند. سپس با استفاده از بسامدها و شکل مودهای ارتعاشی محاسباتی و انجام اصلاحات لازم در رابطه‌سازی مرجع [18]، مسأله اندرکنش سد و مخزن در قلمرو زمان بررسی می شود.

در ادامه ابتدا به شرح معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سامانه سد و مخزن پرداخته خواهد شد و درباره فشار هیدرودینامیک وارد بر بدنه سد و روابط حاکم توضیح کوتاهی داده می‌شود. یادآور می‌شود که این رابطه‌ها و معادله‌ها به شکل کامل در مرجع [18] آمده‌اند و در اینجا معرفی کوتاهی از آن‌ها به نظر خوانندگان می‌رسد. سپس روش جدید برای تحلیل سازه سد، با تعریف تابع‌های شکل مبنا و چگونگی به‌کارگیری این تابع‌ها، بیان خواهدشد. در پایان نیز تحلیل سازه سد با یک نمونه عددی شرح داده می‌شود و به دنبال آن تحلیل اندرکنش سد و مخزن با نمونه‌های دیگری انجام می‌پذیرد.

معادله‌های حرکت

با توجه به شکل (۱) معادله حرکت سد در اثر شتاب ناشی از زلزله و فشار هیدرودینامیک مخزن به صورت زیر نوشته می شود [18]:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-m\ddot{u}_g-P(0,z,t) \qquad (۱)$$

که در آن:

E: مدول الاستیسیته مصالح بدنه سد

I: ممان اینرسی سطح مقطع حول محور خمش (y)

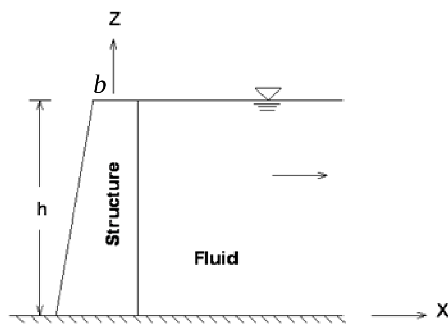
m: جرم در واحد طول سازه

u: تغییر مکان سازه در راستای محورx

$\ddot{u}_g$: شتاب زمین در امتداد بالادست به پایین دست

P: فشار هیدرودینامیک

می‌باشند.



شکل ۱ سامانه مخزن و سد با مقطع متغیر

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، تغییر مکان

به صورت زیر فرض می‌شود:

$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(z)Y_n(t) \qquad (۲)$$

که Φ شکل مود ارتعاش بوده و از حل معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر اویلر- برنولی به دست می‌آید و Y مختصات کلی تابع زمان می‌باشد. لازم به یادآوری است که در این روش از اثر مخزن بر شکل مودها و بسامد سامانه سازه- سیال چشم‌پوشی می‌شود. معادله (۱) به صورت زیر درمی آید:

$$M_n\ddot{Y}_n(t)+\omega_n^2M_nY_n(t)=-V_n(t)-P_n(t) \quad n=1,2,3,...,\infty \qquad (۳)$$

با حل معادله (۳) و محاسبه Y ، تغییرمکان کلی از رابطه (۲) محاسبه خواهد شد.

دررابطه (۳) M_n جرم تعمیم‌یافته هست که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$M_n=\int_0^h\Phi_n^2(z)m(z)dz \qquad (٤)$$

نیروهای ناشی از زلزله، V_n برابرند با:

$$V_n=\ddot{u}_g(t)\int_0^h m(z)\Phi_n(z)dz \qquad (۵)$$

و نیروی تعمیم‌یافته ناشی از فشار برابر است با:

$$P_n=\int_0^h\Phi_n(z)P(0,z,t)dz \qquad (٦)$$

P در رابطه (٦) از حل معادله فشار موج به دست می‌آید که در ادامه بیان خواهد شد.

فرض می‌شود فشار هیدرودینامیک در قلمرو سیال از معادله فشار موج پیروی کند:

$$\nabla^2P(x,z,t)=\frac{1}{C^2}\ddot{P}(x,z,t) \qquad (۷)$$

که در آن،P فشار هیدرو دینامیک بدون گنجاندن اثر هیدرواستاتیک و C سرعت صوت در آب می باشند. فرض می‌شود که موج‌های آب هنگام پخش شدن از سد دور می‌شوند.

شرایط مرزی و اولیه در ناحیه تماسی سازه و سیال به این صورت هستند:

۱. در ناحیه تماسی سازه و سیال:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=0}=-\rho\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}(z,t)\right]=-\rho\left[\ddot{u}_g(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(z)\ddot{Y}_n(t)\right] \qquad (۸)$$

۲. در کف مخزن:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=0}=0 \qquad (۹)$$

۳. در سطح آزاد مخزن با صرف نظر از اثر موج‌های سطحی:

$$P|_{z=h}=0 \qquad (۱۰)$$

٤. با فرض اینکه مخزن در زمان صفر در حالت آزاد قرار داشته باشد:

$$P|_{t=0}=0 \qquad (۱۱)$$

و

$$\left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \qquad (۱۲)$$

با کمک تبدیل لاپلاس و واردکردن شرایط مرزی، توزیع فشار هیدرودینامیک از حل معادله (۷) محاسبه شده و می‌تواند به دو بخش حرکت جسم صلب سد و تغییر مکان سد جداسازی شود. بنابراین، رابطه (۱۳) نتیجه خواهد شد:

$$P_n(t)=P_n^r(t)+P_n^f(t) \qquad (۱۳)$$

$$P_n^r(t)=\frac{4\rho C}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}Q_{nk}\int_0^t\ddot{u}_g(\tau)J_0\left[\lambda_kC(t-\tau)\right]d\tau \qquad (١٤)$$

$$P_n^f(t)=\frac{2\rho C}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}Q_{mk}Q_{nk}\int_0^t\ddot{Y}_m(\tau)J_0\left[\lambda_kC(t-\tau)\right]d\tau \qquad (۱۵)$$

C سرعت موج در آب و J_0 تابع بسل می‌باشد. در رابطه‌های (۱۵) و (١٦) Q_{nk} و λ_k به این صورت به دست می‌آیند:

$$Q_{nk}=\int_0^h \Phi_n(z)\cos\lambda_k z\,dz$$

$$\lambda_k=\frac{(2k-1)\pi}{2h} \qquad (١٦)$$

با فرض تغییرات خطی شتاب زمین در دو گام پی درپی زمانی و با فرض شتاب میانگین ثابت برای سازه در پایان معادله (٣) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M_n\ddot{Y}_n(t)+\omega_n^2 M_n Y_n(t)=-\ddot{u}_g(t)\int_0^h m(z)\Phi_m(z)dz$$
$$-\frac{4\rho C}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}Q_{nk}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)J_0\left[\lambda_k C(t-\tau)\right]d\tau$$
$$-\frac{2\rho C}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}Q_{mk}Q_{nk}\int_0^t \ddot{Y}_m(\tau)J_0\left[\lambda_k C(t-\tau)\right]d\tau \qquad (١٧)$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1M} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{M1} & m_{M2} & \cdots & m_{MM} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1(t) \\ \ddot{Y}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{Y}_m(t) \end{Bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix} K_{11} & & & \\ & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_{MM} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_M(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \\ \vdots \\ L_M(t) \end{Bmatrix} \qquad (١٨)$$

که در آن:

$$m_{ij}=W_{ij}, i\neq j \qquad (١٩)$$

$$m_{ii}=M_i+W_{ii} \qquad (٢٠)$$

$$K_{ii}=\omega_i^2 M_{ii} \qquad (٢١)$$

$$L_i(t)=-V_i(t)-P_i^r(t)-F_i(t) \qquad (٢٢)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، محاسبه مقدارهای بالا بستگی به مقادیر ω و Φ دارد که در حالت تیر با مقطع ثابت به صورت دقیق در دسترس می‌باشند. در حالت سد با مقطع متغیر محاسبه مقادیر ω و Φ پیچیده بوده و حل بسته‌ای برای آن ارایه نشده است. افزون بر موردهای یادشده در حالت مقطع ثابت جرم نیز دارای مقدار ثابتی است و در روابط (٤ و٥) به‌سادگی از تابع اولیه خارج می‌شود، درصورتی که در تیر با مقطع متغیر، جرم تابعی از ارتفاع می باشد که به پیدایش تابع اولیه‌های پیچیده‌تر می‌انجامد. در بخش بعد محاسبه مقدارهای بسامد طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی برای تیر با مقطع متغیر شرح داده خواهد شد وسپس سد به صورت تیر با مقطع متغیر الگوسازی و تحلیل می‌شود. در مقاله حاضر در کنار روش نوینی که برای تحلیل پویای تیر با مقطع متغیر ارایه شده، اصلاحاتی نیز در حل معادله (١٧) انجام شده است. این اصطلاحات بر پایه کاربرد دنباله‌های توانی و بسط تابع‌های چندجمله‌ای برای تابع اولیه‌گیری تابع‌های بسل در رابطه (١٧) هستند. بنا به رابطه (١٧) تابع اولیه‌گیری از تابع‌های بسل ظاهر می‌شود. در مرجع [18] از تابع‌های Struve به جای تابع اولیه‌های تابع بسل استفاده شده است و پاسخ‌ها با ٣٥ جمله در معادله (١٧) محاسبه شده‌اند. در روش اصلاحی پیشنهادی با ١٠ جمله پاسخ‌ها با دقت خوبی محاسبه می‌شود. این اصلاح در روش حل دقت و سرعت را بالا می‌برد.

محاسبه شکل مودها و بسامدهای تیر با مقطع متغیر

با توجه به اهمیت محاسبه شکل مودها و بسامد تیر با مقطع متغیر، در این مقاله روش نوینی برای محاسبه آن‌ها ارایه می‌شود. به این منظور لازم است تا ابتدا به معرفی تابع‌های شکل مبنا پرداخته شود. تعریف‌های مربوط به تابع‌های شکل مبنا که پایه و اساس روش پیشنهادی است در جدول (١) آمده‌اند.

با توجه به اصل تقابل کار بتی- ماکسول، می‌توان تابع‌های شکل مبنا را مانند جدول (٢) تعریف کرد.

با توجه به این تعریف‌ها ماتریس نرمی گرهی با رابطه‌های (٢٣) و (٢٤) به دست می‌آید:

$$\mathbf{F}_{11}=\begin{bmatrix} b_{v1}(0) & b_{\theta 1}(0) \\ \left.\frac{db_{v1}}{dx}\right|_{x=0} & \left.\frac{db_{\theta 1}}{dx}\right|_{x=0} \end{bmatrix} \qquad (٢٣)$$

$$\mathbf{F}_{22}=\begin{bmatrix} b_{v2}(L) & b_{\theta 2}(L) \\ \left.\frac{db_{v2}}{dx}\right|_{x=L} & \left.\frac{db_{\theta 2}}{dx}\right|_{x=L} \end{bmatrix} \qquad (٢٤)$$

جدول ۱ تعریف تابع‌ها شکل مبنا

شکل	تعریف	نشانه
b_{v1} x 1	تغییر مکان قائم گره سمت چپ تیر طره در اثر بار واحدی که در فاصله x اثر می کند .	b_{v1}
$b_{\theta1}$ x 1	زاویه چرخش گره سمت چپ تیر طره در اثر بار واحدی که در فاصله x اثر می کند.	$b_{\theta1}$
b_{v2} x 1	تغییر مکان قائم گره سمت راست تیر طره در اثر بار واحدی که در فاصله x اثر می کند.	b_{v2}
$b_{\theta2}$ x 1	زاویه چرخش گره سمت چپ تیر طره در اثر بار واحدی که در فاصله x اثر می کند.	$b_{\theta2}$

ماتریس سختی گره‌ها نیز به این صورت بیان می‌شود:

$$G=\begin{bmatrix}K_{11} & 0\\ 0 & K_{22}\end{bmatrix} \quad , \quad K_{ii}=F_{ii}^{-1} \qquad (۲۵)$$

با معرفی **b** به صورت:

$$b=\{b_{v1} \quad b_{\theta1} \quad b_{v2} \quad b_{\theta2}\}^T \qquad (۲۶)$$

و بهره گرفتن از مفهوم‌های روش اجزای محدود، ماتریس‌های جرم و سختی سازه‌ای با رابطه‌های (۲۷) و (۲۸) محاسبه خواهند شد: [21]

$$M=G\left(\int_0^L b\rho A(x)b^T dx\right)G \qquad (۲۷)$$

$$K=G\left(\int_0^L b''EI(x)b''^T dx\right)G \qquad (۲۸)$$

با توجه به ماتریس‌های جرم و سختی سازه، تحلیل سازه و تعیین دیگر عامل‌ها به‌سادگی امکان‌پذیر خواهد بود. بنابراین، مسأله اصلی تعیین جزءی بردار **b** می‌باشد. در حالت ایستا برای تعیین جزءی بردار **b** که در واقع تغییر مکان‌ها در اثر بار یا لنگر واحد هستند، می‌توان از روش‌های معمول مانند روش بار واحد که در حقیقت نتیجه حل معادله دیفرانسیل تیر در حالت ایستا است، بهره گرفت.

در حالت پویا باید معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت، رابطه(۲۹) را حل کرد.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x).\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}\right)+\rho A(x).\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}=Q(x,t) \qquad (۲۹)$$

با فرض:

$$Q(x,t)=q(x)(c_1 Sin(\omega t)+c_2 Cos(\omega t)) \qquad (۳۰)$$

$$W(x,t)=w(x)(c_1 Sin(\omega t)+c_2 Cos(\omega t)) \qquad (۳۱)$$

معادله دیفرانسیل حرکت به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x).\frac{d^2 w(x)}{dx^2}\right)-\omega^2.\rho A(x).w(x)=0 \qquad (۳۲)$$

می‌توان روش‌های عددی گوناگون را برای حل این معادله دیفرانسیل به کار برد. پس از محاسبه جزءی بردار **b** و تشکیل ماتریس‌های جرم و سختی سازه می‌توان شکل مودها و بسامدهای تیر با مقطع متغیر را محاسبه کرد. در این مقاله از روش تبدیل دیفرانسیل برای حل معادله حرکت و محاسبه اجزای بردار **b** استفاده می‌شود. با فرض $\xi=x/L$ و با کمک روش تبدیل دیفرانسیل رابطه (۳۲) به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\sum_{i=0}^{k}\overline{EI}(k-i)(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)\overline{W}(k+4)+$$
$$2\sum_{i=0}^{k}(k-i+1)\overline{EI}(k-i+1)(i+1)(i+2)(i+3)\overline{W}(i+3)+$$
$$\sum_{i=0}^{k}(k-i+1)(k-i+2)\overline{EI}(k-i+2)(i+1)(i+2)\overline{W}(i+2)$$
$$=L^4\omega^2\sum_{i=0}^{k}\overline{\rho A}(k-i)\overline{W}(i) \qquad (۳۳)$$

با از رابطه (۳۳) همه جمله‌های $\overline{W}(k)$ به ازای $k=4,5,...$ برحسب چهار جمله اول $\overline{W}(0)$، $\overline{W}(1)$، $\overline{W}(2)$ و $\overline{W}(3)$ محاسبه می‌شوند. بنابراین برای به دست آوردن تغییر مکان محاسبه چهار جمله اول کافی هست. با وارد کردن شرایط مرزی مناسب می‌توان جمله‌های نامبرده را محاسبه کرد. با توجه به تعریف ارایه شده در جدول (۲) برای تابع‌ها شکل مبنا ، شرایط مرزی مناسب برای هر تابع شکل را می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$b_{v1}: V|_{\xi=0}=1 \quad M|_{\xi=0}=0 \quad w|_{\xi=1}=0 \quad \theta|_{\xi=1}=0 \qquad (۳۴)$$

$$b_{\theta1}: V|_{\xi=0}=0 \quad M|_{\xi=0}=-1 \quad w|_{\xi=1}=0 \quad \theta|_{\xi=1}=0 \qquad (۳۵)$$

$$b_{v2}: w|_{\xi=0}=0 \quad \theta|_{\xi=0}=0 \quad V|_{\xi=1}=-1 \quad M|_{\xi=1}=0 \qquad (۳۶)$$

$$b_{\theta2}: w|_{\xi=0}=0 \quad \theta|_{\xi=0}=0 \quad V|_{\xi=1}=0 \quad M|_{\xi=1}=1 \qquad (۳۷)$$

با کاربرد تئوری تیر اویلر- برنولی، زاویه چرخش، لنگرخمشی و نیروهای برشی را از رابطه‌های زیر می توان محاسبه کرد:

$$\theta(x)=\frac{dw}{dx} \qquad (۳۸)$$

$$M(x)=EI(x)\frac{d^2w}{dx^2} \qquad (۳۹)$$

$$V(x)=\frac{d}{dx}\left(EI(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right) \qquad (۴۰)$$

با این رابطه‌ها، چهار جمله اول $\overline{W}(k)$ و در نتیجه تغییر مکان تیر محاسبه می‌شود.

در ادامه برای دریافت بهتری از چگونگی کاربرد تابع‌های شکل مبنا در محاسبه ویژگی‌های سامانه، یک نمونه عددی برای محاسبه بسامد طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر با مقطع متغیر ارایه خواهد شد. در نمونه ۲ برای وارسی درستی صحت روش پیشنهادی، محاسبات مربوط به سد با مقطع ثابت با روش جدید انجام شده و نتیجه‌های حاصل با نتیجه‌های موجود در نوشته‌های فنی مقایسه شده اند. در نمونه ۳ نتیجه‌های تحلیل پویای سد و مخزن در حالت تیر با مقطع متغیر انجام شده است. نتیجه‌های حاصل با نتیجه‌های حاصل از برنامه EAGD که بر مبنای روش اجزای محدود است [6]، روش نیمه تحلیلی [۱۹] و روش تفاضل محدود [۲۲] مورد بررسی و مقایسه قرارگرفته‌اند. بررسی نتیجه‌ها بیانگر کارایی و درستی روش پیشنهادی می‌باشد.

جدول ۲ تعریف تابع‌ها شکل مبنا با توجه به اصل تقابل کار بتی— ماکسول

شکل	تعریف	نشانه
1 x b_{v1}	تغییر مکان قائم در فاصلهx تحت تاثیر بار واحدی که در گره سمت چپ تیر طره وارد می شود .	b_{v1}
1 x $b_{\theta1}$	زاویه چرخش در فاصلهx تحت تاثیر لنگر واحدی که در گره سمت چپ تیر طره وارد می شود .	$b_{\theta1}$
x b_{v2} 1	تغییر مکان قائم در فاصلهx تحت تاثیر بار واحدی که در گره سمت راست تیر وارد می شود .	b_{v2}
x $b_{\theta2}$ 1	زاویه چرخش در فاصلهx تحت تاثیر لنگر واحدی که در گره سمت راست تیر وارد می شود .	$b_{\theta2}$

نمونه ها

نمونه ۱:

در این نمونه چگونگی محاسبه تابع‌های شکل مبنا برای یک تیر با مقطع متغیر با روش تبدیل دیفرانسیل شرح داده شده و ماتریس‌های سختی و جرم، محاسبه خواهند شد. نتیجه‌های حاصل با نتیجه‌های موجود در نوشته‌های فنی مقایسه و فرضیات زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$E = 71\times10^9 N/m^2 \,;\, \rho = 2700 kg/m^3 \,;\, L = 4m \,;$$
$$A(\xi) = 1.2\times10^{-4}(1-0.5\xi)$$

سطح مقطع و لنگر لختی مقطع تیر به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$A(\xi) = 1.2\times10^{-4}(1-0.5\xi) \text{ و } I(\xi) = 1\times10^{-7}(1-0.5\xi)^3$$

چهار جمله اول به این صورت تعریف می‌شود:

$$\overline{W}(0) = r \qquad (٤١)$$
$$\overline{W}(1) = s \qquad (٤٢)$$
$$\overline{W}(2) = u \qquad (٤٣)$$
$$\overline{W}(3) = z \qquad (٤٤)$$

بافرض $k = 0$ و جای‌گذاری رابطه‌های (٤١-٤٤) در معادله (٣٣) این رابطه به دست می‌آید:

$$\overline{W}(4) = 0.1947r - 0.125u + 0.75z \qquad (٤٥)$$

به همین ترتیب با فرض $k = 1$ و جای‌گذاری رابطه‌های (٤١-٤٤) در معادله (٣٣) داریم، رابطه (٤٦) حاصل خواهد شد:

$$\overline{W}(5) = 0.1558r + 0.0389s - 0.1u + 0.45z \qquad (٤٦)$$

به ازای $k = 2$:

$$\overline{W}(6) = 0.0974r + 0.0325s - 0.0495u + 0.25z \qquad (٤٧)$$

به همین روش می‌توان جمله‌های بعدی را نیز محاسبه کرد. در این نمونه ١٨ جمله در نظر گرفته می‌شود. با کمک ویژگی‌های روش تبدیل دیفرانسیل تابع تغییر مکان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(\xi) = \sum_{i=0}^{18} \overline{W}(i)\xi^i \qquad (٤٨)$$

با وارد کردن شرایط مرزی برای تعیین b_{v1} این چهار معادله را می‌توان به دست آورد:

$$\begin{cases} 21300u + 42600z = 64 \\ u = 0 \\ 1.5707r + 1.1192s + 0.6746u + 2.7573z = 0 \\ 3.1463r + 1.7827s + 0.2923u + 12.2603z = 0 \end{cases} \qquad (٤٩)$$

با حل دستگاه معادله (٤٩)، مقدارهای r، s، u و z تعیین می‌شوند:

$$r = -0.0183 \quad s = 0.0220 \quad u = 0 \quad z = 0.0015 \qquad (٥٠)$$

در پایان b_{v1} به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned} b_{v1} = &-1.8345e\text{-}2 + 2.2044e\text{-}2\xi + 1.5023e\text{-}3\xi^3 \\ &-2.4450e\text{-}3\xi^4 - 1.3229e\text{-}3\xi^5 - 6.9495e\text{-}4\xi^6 \\ &-3.5108e\text{-}4\xi^7 - 1.8369e\text{-}4\xi^8 - 9.7058e\text{-}5\xi^9 \\ &-5.1259e\text{-}5\xi^{10} - 2.6953e\text{-}5\xi^{11} - 1.4101e\text{-}5\xi^{12} \\ &-7.3407e\text{-}6\xi^{13} - 3.8048e\text{-}6\xi^{14} - 1.9645e\text{-}6\xi^{15} \\ &-1.0109e\text{-}6\xi^{16} - 5.1871e\text{-}7\xi^{17} - 2.6548e\text{-}7\xi^{18} \end{aligned} \qquad (٥١)$$

به همین ترتیب، دیگر تابع‌های شکل مبنا نیز محاسبه خواهند شد:

$$\begin{aligned} b_{\theta1} = &5.5115e\text{-}3 - 5.6679e\text{-}3\xi - 1.1268e\text{-}3\xi^2 \\ &-5.6338e\text{-}4\xi^3 + 7.9142e\text{-}4\xi^4 + 4.9693e\text{-}4\xi^5 \\ &+2.6758e\text{-}4\xi^6 + 1.3748e\text{-}4\xi^7 + 7.2328e\text{-}5\xi^8 \\ &+3.8326e\text{-}5\xi^9 + 2.0276e\text{-}5\xi^{10} + 1.0675e\text{-}5\xi^{11} \\ &+5.5893e\text{-}6\xi^{12} + 2.9117e\text{-}6\xi^{13} + 1.5099e\text{-}6\xi^{14} \\ &+7.7994e\text{-}7\xi^{15} + 4.0149e\text{-}7\xi^{16} + 2.0607e\text{-}7\xi^{17} \\ &+1.0549e\text{-}7\xi^{18} \end{aligned} \qquad (٥٢)$$

$$b_{v2} = 7.0670e\text{-}3\xi^2 + 8.4441e\text{-}4\xi^3 \\ -2.5006e\text{-}4\xi^4 - 3.2671e\text{-}4\xi^5 - 1.3885e\text{-}4\xi^6 \\ -5.5977e\text{-}5\xi^7 - 2.3641e\text{-}5\xi^8 - 1.0634e\text{-}5\xi^9 \\ -4.9715e\text{-}6\xi^{10} - 2.3774e\text{-}6\xi^{11} - 1.1528e\text{-}6\xi^{12} \\ -5.6415e\text{-}7\xi^{13} - 2.7778e\text{-}7\xi^{14} - 1.3737e\text{-}7\xi^{15} \\ -6.8142e\text{-}8\xi^{16} - 3.3878e\text{-}8\xi^{17} - 1.6871e\text{-}8\xi^{18}$$
(٥٣)

$$b_{\theta 2} = 2.0815e\text{-}3\xi^2 + 6.0764e\text{-}4\xi^3 \\ +1.9555e\text{-}4\xi^4 + 6.5292e\text{-}5\xi^5 + 4.8837e \\ -5\xi^6 + 3.3581e\text{-}5\xi^7 + 2.0771e\text{-}5\xi^8 + 1.2034e\text{-}5\xi^9 \\ +6.7217e\text{-}6\xi^{10} + 3.6690e\text{-}6\xi^{11} + 1.9710e\text{-}6\xi^{12} \\ +1.0466e\text{-}6\xi^{13} + 5.5076e\text{-}7\xi^{14} + 2.8781e\text{-}7\xi^{15} \\ +1.4955e\text{-}7\xi^{16} + 7.7353e\text{-}8\xi^{17} + 3.9857e\text{-}8\xi^{18}$$
(٥٤)

ماتریس‌های نرمی گرهی با رابطه‌های (١٨) و (١٩) تشکیل می‌شوند:

$$\mathbf{F}_{11} = \begin{bmatrix} -0.0183 & 0.0055 \\ 0.0055 & -0.0014 \end{bmatrix} \qquad (٥٥)$$

$$\mathbf{F}_{22} = \begin{bmatrix} 0.0071 & 0.0031 \\ 0.0031 & 0.0018 \end{bmatrix} \qquad (٥٦)$$

بنابراین ماتریس سختی گرهی برابر است با:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} 302.4 & 1187.9 \\ 1187.9 & 3952.5 \end{bmatrix} \qquad (٥٧)$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} 567.8 & -977.9 \\ -977.9 & 2239.7 \end{bmatrix} \qquad (٥٨)$$

با استفاده از رابطه (٢٥) می توان نوشت:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 302.4 & 1187.9 & 0 & 0 \\ 1187.9 & 3952.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 567.8 & -977.9 \\ 0 & 0 & -977.9 & 2239.7 \end{bmatrix}$$
(٥٩)

با توجه به رابطه (٥٩) و به کار بردن رابطه‌های (٢٧-٢٨) ماتریس‌های سختی و جرم محاسبه می‌شوند و با کمک رابطه (٦٠) بسامدها به دست می‌آیند. در پایان، شکل مودها محاسبه خواهند شد.

$$\left|K - \omega^2.M\right| \le \varepsilon \qquad (٦٠)$$

در جدول (٣) بسامد طبیعی با روش مورد بحث محاسبه و نتیجه‌های حاصل با نتیجه‌های موجود در مرجع [23] مقایسه شده‌اند.

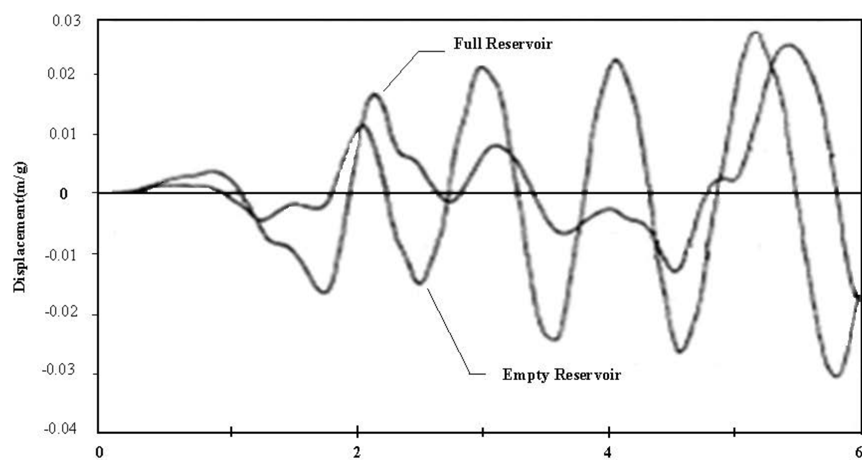
جدول ٣ بسامد بدون بعد تیر با مقطعی که به صورت خطی تغییر می‌کند

بسامد بی بعد	روش حاضر	مرجع [23]
مود اول	3.82378	3.82379
مود دوم	18.31726	18.3173
مود سوم	47.26482	47.2648
مود چهارم	90.45047	90.4505
مود پنجم	148.00174	148.002

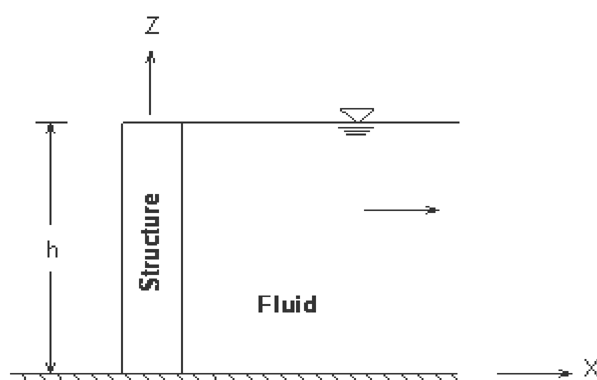
نمونه ٢:

در این نمونه پاسخ پویای سد با مقطع ثابت با تابع‌های شکل پیشنهادی محاسبه و نتیجه‌ها با حل تحلیلی Tsai &Lee مقایسه شده‌اند[18]. ضخامت سد ثابت و برابر ٢٥m^2، ارتفاع سد ١٨٠m، جرم واحد طول آن ٣/٦ton/m و EI= ٩/٨٤٣٧ton. m ^{2} فرض شده است.

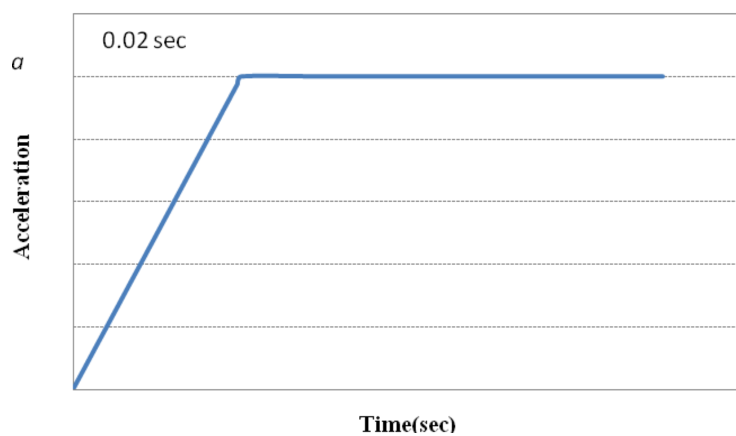
در جدول (٤) بسامدهای طبیعی تیر با مقطع ثابت با کمک روش پیشنهادی محاسبه شده و نتیجه‌های حاصل با نتیجه‌های دقیق مرجع‌های [23] و[24] مورد بررسی و مقایسه قرارگرفته‌اند. در شکل (٢) پاسخ پویای سامانه سد و مخزن در برابر زلزله السنترو که در مرجع [18] ارایه شده، آمده است و نتیجه‌های حاصل از تحلیل با استفاده از تابع‌های شکل و مقایسه آن‌ها با حل تحلیلی Tsai در شکل‌های (٥-٩) مشاهده می‌شود .



شکل ۲ پاسخ پویای سیستم سد و مخزن در برابر زلزله السنترو مطابق مرجع [18]



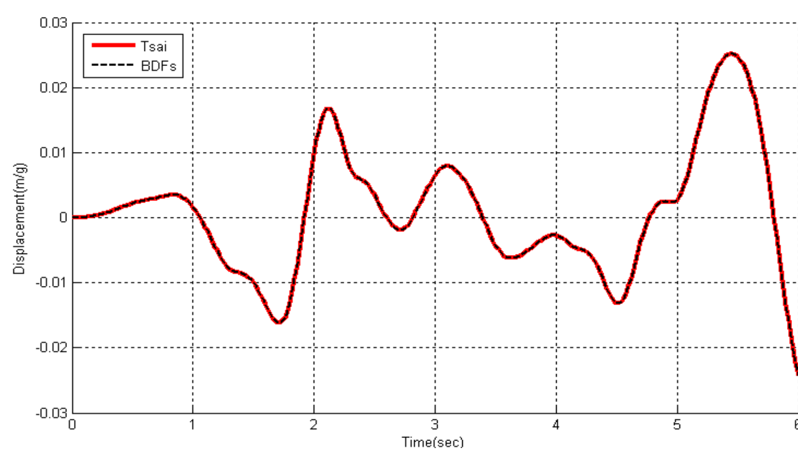
شکل ۳ سیستم مخزن و سد با مقطع ثابت



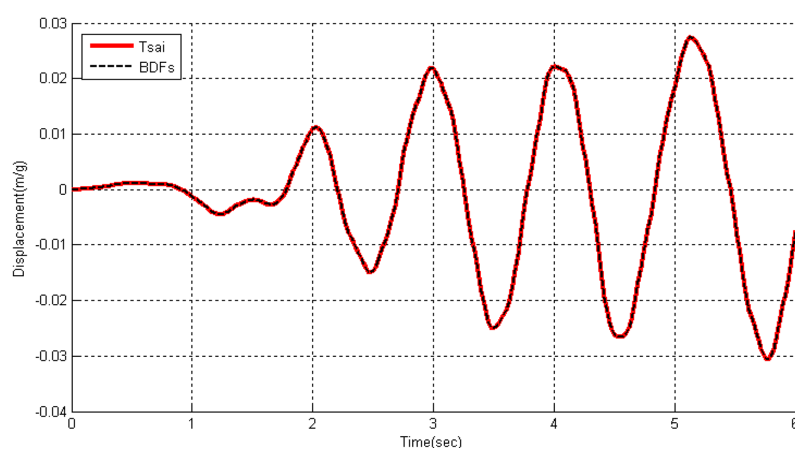
شکل ٤ شتاب رمپ

جدول ٤ بسامد بدون بعد تیر با مقطع ثابت

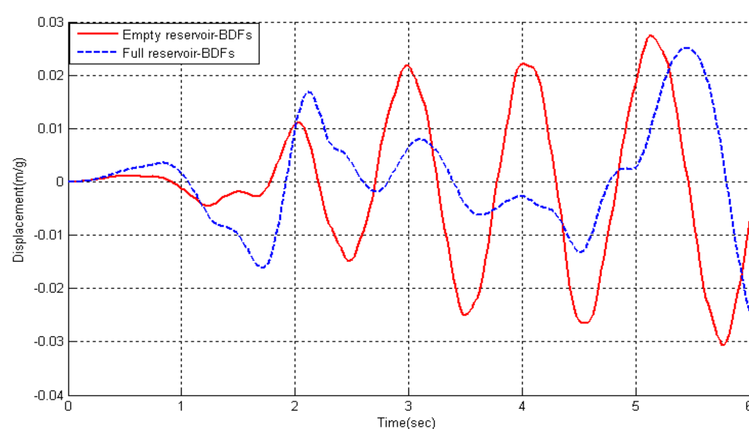
بسامد بی بعد	روش حاضر	مرجع [23]	مرجع [24]
مود اول	3.51601	3.51602	3.51602
مود دوم	22.03449	22.0345	22.0345
مود سوم	61.69721	61.6972	61.6972
مود چهارم	120.90191	120.902	120.902
مود پنجم	199.85944	199.86	199.86



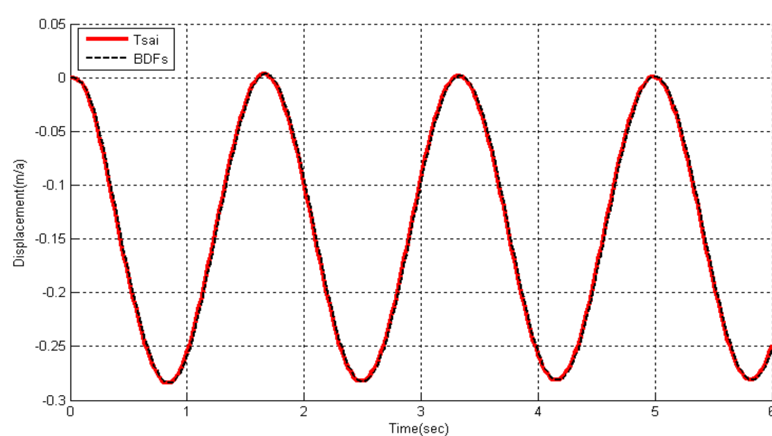
شکل ٥ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مخزن پر تحت اثر زلزله ال سنترو



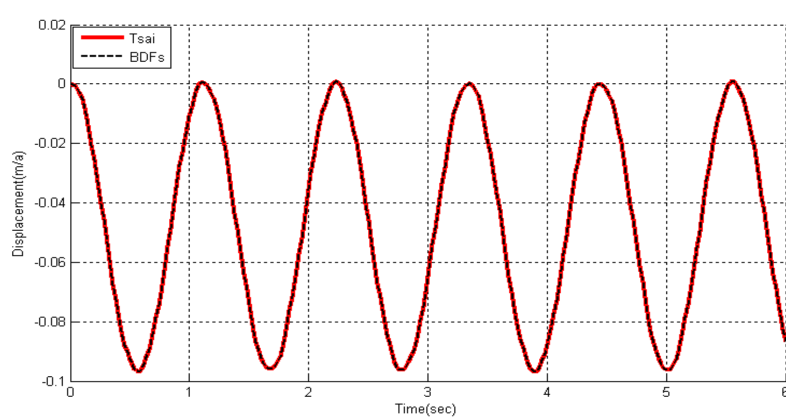
شکل ٦ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مخزن خالی تحت اثر زلزله ال سنترو



شکل ۷ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مخزن پر و خالی تحت اثر زلزله ال سنترو



شکل ۸ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مخزن پر تحت اثر شتاب رمپ



شکل ۹ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مخزن خالی تحت اثر شتاب رمپ

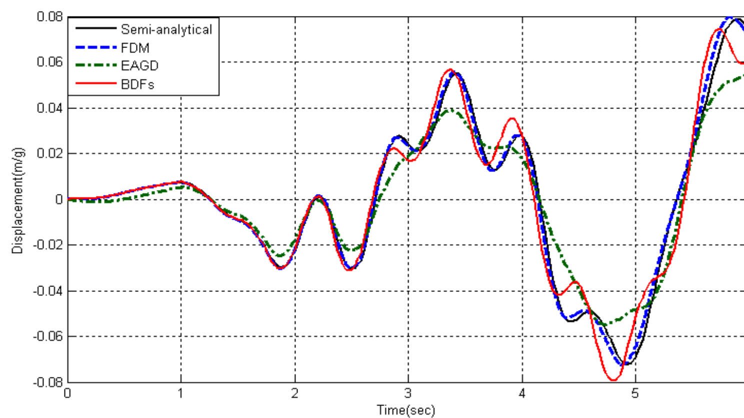
نمونه ۳:

در این نمونه پاسخ پویای سد با مقطعی که به صورت خطی تغییر می‌کند (شکل ۱)، با تابع‌های شکل ارایه شده محاسبه و نتیجه‌ها با نتیجه‌های حاصل از برنامه EAGD [6] و روش تفاضل محدود [۱۹] و روش نیمه تحلیلی [۲۲] مقایسه شده‌اند (شکل‌های ۱۰- ۱۵). ضخامت سد در کف مخزن $۲۵m^2$ و در بالای سد $۱۲/۵m^2$، ارتفاع سد ۱۸۰m، چگالی آن $۲/٤ton/m^3$ و ضریب کشسانی $۳/۵ton/m^2$ فرض شده است.

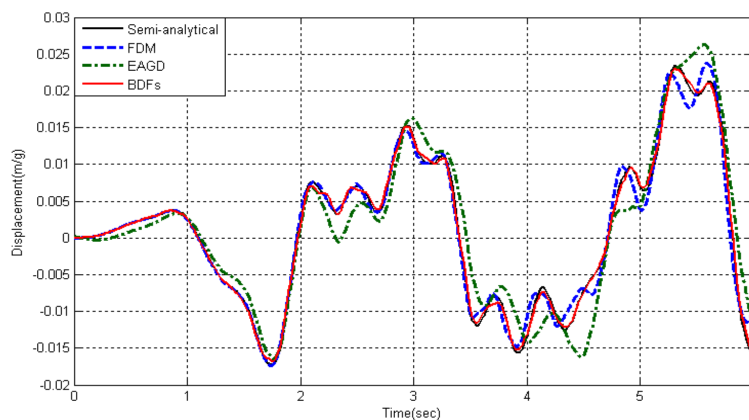
نمونه ٤:

در این نمونه اثر در نظر گرفتن تغییرات مقطع در پاسخ سامانه سد و مخزن بررسی شده است. دو حالت مخزن با مقطع ثابت و ضخامت ۲۵m در کف و مخزن با ضخامت متغیر (ضخامت ۲۵m در کف و ۱۲/۵m در بالای سد) درنظر گرفته شده و پاسخ پویای سد و تغییرات فشار هیدرودینامیک در دو حالت با یکدیگر مورد مقایسه و بررسی قرار گرفته‌اند (شکل‌های (١٦) و (١٧)).

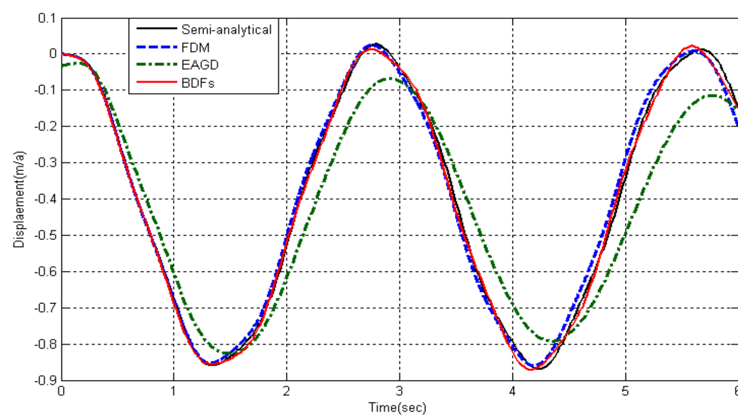
همان‌طورکه ملاحظه می‌شود، درنظرگرفتن تغییرات مقطع، تاثیر تعیین‌کننده‌ای در پاسخ سامانه دارد و الگوکردن سد با مقطع ثابت درجهت اطمینان نیست و سفارش نمی‌شود.



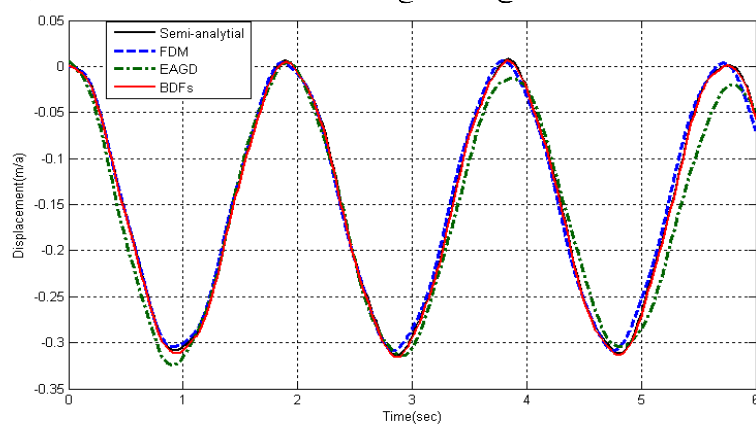
شکل ۱۰ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مقطع متغیر در حالت مخزن پر تحت اثر زلزله ال سنترو



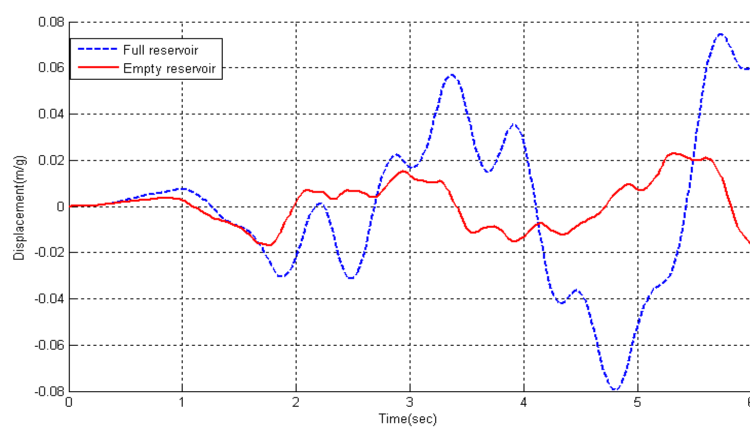
شکل ۱۱ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مقطع متغیر در حالت مخزن خالی تحت اثر زلزله ال سنترو



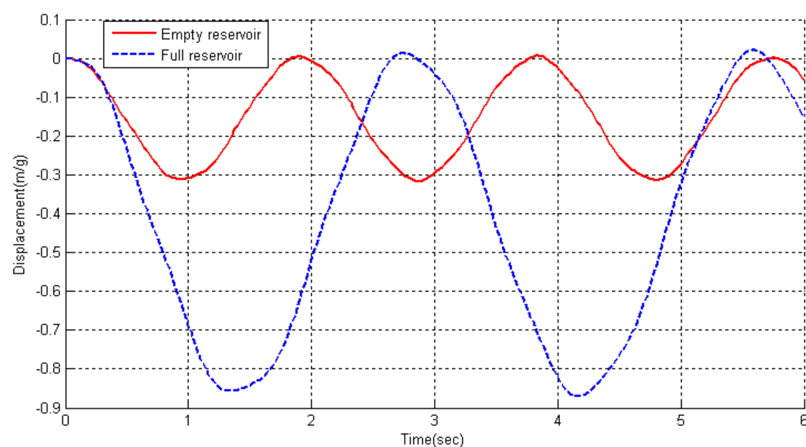
شکل ۱۲ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مقطع متغیر در حالت مخزن پر تحت اثر شتاب رمپ



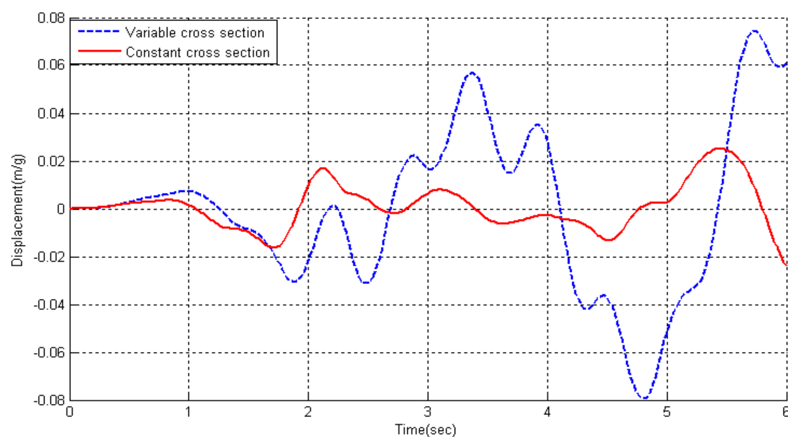
شکل ۱۳ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مقطع متغیر در حالت مخزن خالی تحت اثر شتاب رمپ



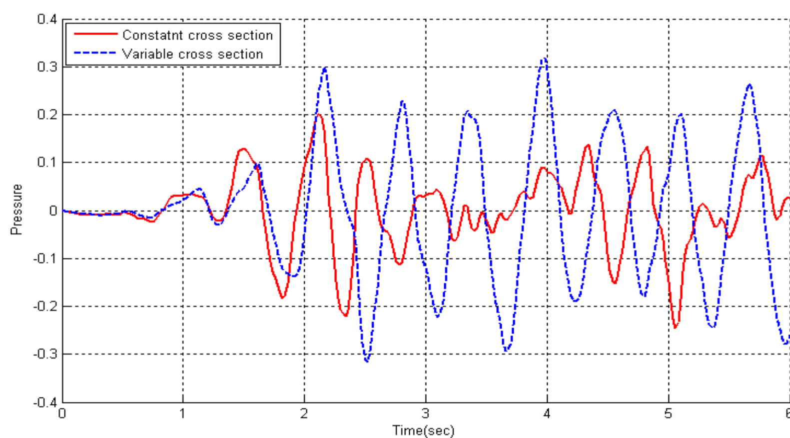
شکل ۱٤ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مقطع متغیر در حالت مخزن پر و خالی تحت اثر زلزله ال سنترو



شکل ۱۵ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مقطع متغیر در حالت مخزن پر و خالی تحت اثر شتاب رمپ



شکل ١٦ مقایسه تغییر مکان تاج سد با مقطع ثابت و متغیر در حالت مخزن پر تحت اثر زلزله السنترو



شکل ۱۷ مقایسه تغییرات فشار هیدرودینامیک سد با مقطع ثابت و متغیر تحت اثر زلزله السنترو

نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل دقیق پویای اندرکنش سد و مخزن در قلمرو زمان بررسی شد. سازه سد انعطاف‌پذیر و مخزن تا بی‌نهایت در نظر گرفته شد. الگوسازی سازه سد به صورت تیر اویلر- برنولی با مقطع متغیر و درنظرگرفتن بدنه سد در بالادست به صورت قائم انجام پذیرفت. روش نوینی برای تحلیل تیر با مقطع متغیر ارایه شد. این روش نوین بر مبنای کاربرد تابع‌های جدیدی است که تابع‌های شکل مبنا نام دارند.این تابع‌ها از حل معادله دیفرانسیل حرکت تیراویلر - برنولی با مقطع متغیر به دست می‌آیند. با استفاده از این تابع‌ها ویژگی‌های پویا (بسامدها و مودهای ارتعاشی) تیرها با مقطع متغیر محاسبه می‌شوند. سپس با کمک بسامدها وشکل مودهای ارتعاشی محاسباتی مسأله اندرکنش سد و مخزن در قلمرو زمان مورد بررسی قرار گرفت. در فرآیند حل مسأله اندرکنش، اصلاحاتی صورت گرفت. در این اصلاحات دنباله توانی و بسط تابع‌های چند جمله‌ای برای تابع اولیه گیری تابع‌های بسل به کار رفت و با تعداد جمله‌های کمتر جواب‌های دقیقی به دست آمد. برای اطمینان از درستی روش پیشنهادی، ابتدا تحلیل سد در حالت مخزن خالی بررسی شده و نتیجه‌های آن با نتیجه‌های موجود در نوشته‌های فنی مقایسه شد. مقایسه نتیجه‌ها، بیانگر کارآیی و درستی روش پیشنهادی می‌باشد.

در ادامه، اندرکنش سد و مخزن در قلمرو زمان و در اثر زلزله ال سنترو و شتاب رمپ مورد بررسی قرار گرفت. شایان توجه است که نتیجه‌های تحلیل اندرکنش سازه و مخزن، افزون بر اثر حضور مخزن به تغییر شکل‌های سامانه سازه وابسته می‌باشد و از اثر تغییر در مقطع سد نمی‌توان چشم پوشید. از این رو، روش دقیق تعیین تغییر شکل‌های سامانه سازه در حالت مقطع متغیر ارایه شده است که این امر امکان تحلیل اندرکنش سازه- سیال را با دقت بالا فراهم می‌سازد. در پایان، نتیجه‌ها با نتیجه‌های موجود در نوشته‌های فنی مقایسه شده‌اند که این مقایسه، دقت بالای محاسبات و کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

مراجع

1. Westergaard, H.M.," Wave pressures on dams during earthquakes." ASCE, 98, pp. 418-433, (1933).
2. Chopra, A. K.," Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes." *J. of Engng. Mech., ASCE,* 93(6), pp. 205-223, (1967).
3. Chwang, A.T., "Hydrodynamic pressures on sloping dam during earthquakes. Part 2. Exact theory." *J. of Fluid Mech.,* 87, pp. 343-348, (1978).
4. Mei, C.C., Foda, M.A. and Tong, P.," Exact and hybrid- element solutions for the vibration of a thin elastic structure seated on the sea floor." APPl. Ocean Res., 1(2), pp. 79-88,(1979).
5. Liu,P.L.F. "Hydrodynamic pressures on rigid dams during earthquakes." *J. Fluid Mech.,* 165, pp. 131-145, (1986).
6. Fenves and Chopra A. K., "A computer program for earthquake analysis of concrete gravity dams." Report UCB/EERC-84/11 university of California, Berkeley, EAGD-84: (1984).

7. Cheng, A.H. and Niu, T.P., "Earthquake Reliability Analysis of Dam-Reservoir-Foundation system using Boundary Element Method." *,Proceeding of 4th U.S. National conf. on earthquake Engng.,* 3, pp. 85-94, (1990).
8. Estorff O. von, and Antes H, "On FEM-BEM coupling for Fluid-Structure Interaction Analysis in the time domain." *Int. J.of Numer. Meth. Engng.,* 31, pp.1151-1168, (1991).
9. Yerli, HR. and Kacin, S., "A Parallel Finite-Infinite Element Model for 2-Dimensional soil-structure interaction problems." *Soil Dyn. Earthquake Enging*, 23, pp. 249-253, (2003).
10. Kucukarslan, S., "Transient Dynamic Analysis of Dam-Reservoir Interaction by coupling DRBEM and FEM.", *Engng Comput*., 21, pp. 692-707, (2004).
11. Soares Jr. D. and Mansur, W.J. ,"Dynamic analysis of fluid–soil–structure interaction problems by the boundary element method", *J. of Comput. Physics,* 219 ,pp. 498–512,(2006).
12. Millan, M. A.,Young Y. L. and Prevost J. H. "The effects of reservoir geometry on the seismic response of gravity dams", *Earthquake Engng Struct. Dyn.* , 36, pp.1441–1459, (2007).
13. Gerstenberger,A. and Wall, Wolfgang A. " An extended Finite Element Method/Lagrange multiplier based approach for fluid–structure interaction", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*., 197 ,pp. 1699–1714, (2008).
14. Hung, T.K. and Wang, M.H., "Nonlinear Hydrodynamic pressure on Rigid Dam Motion" *J. Engng. Mech.,* 113, pp. 482-499, (1987).
15. Hung, T.K. and Chen, B.F., "Nonlinear Hydrodynamic Pressure on Dams", *J. Engng. Mech.(ASCE)* ,116, pp. 1372-1391,(1990).
16. Chen, B.F. "Nonlinear Hydrodynamic Pressure on Dam faces with Arbitrary Reservoir Shapes", *J. Hydraulic Research,* 32, pp. 404-413,(1994).
17. Tsai, C.S. and Lee, G.C. and Ketter, R.L.," A semi-analytical method for time-domain analysis of dam-reservoir interactions", *Int. J. for Numer. Meth. Engng.,* 29(5), pp. 913-933, (1990a).
18. Lee, G.C. and Tsai, C.S., "Time-domain analyses of dam-reservoir system Part I: Exact solution." *J. of Engng. Mech., ASCE,* 117(9), pp. 1990-2006,(1991).

۱۹. فرساد، علیرضا. و عطارنژاد، رضا " حل بسته اندرکنش سد و مخزن در قلمرو زمان با در نظر گرفتن تغییرات ضخامت سد"، نشریه دانشکده فنی، جلد ۳۹، شماره ۳: ۳۲۹–۳٤۰، (۱۳۸٤).

۲۰. کریمی، کیانوش و عطارنژاد، رضا " اندرکنش سد و مخزن در دامنه زمان به وسیله روش تابع اولیه حلقوی منفرد مجزا (DSC)" نشریه دانشکده فنی، دوره ٤۲، شماره ٤: ٤۹۷–۵۰۸، (۱۳۸۷).

21. Attarnejad, R., "Basic Displacement Functions an Analysis of Non-Prismatic Beams.", *Engng. Comput*., 27, pp. 733-745, (2010)

۲۲. عبداللهی، محمود " تحلیل پویای اندرکنش سد- مخزن – پی به روش نیمه تحلیلی". پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی عمران ،(۱۳۸۹)

23. Banerjee, J.R., Su, H. and Jackson, D.R.," Free vibration of rotating tapered beams using the dynamic stiffness method.", *J. of Sound and Vibration,* 298, pp. 1034–1054,(2006).

24. Paz, M.*"Structural Dynamics: Theory and computations",* 3rd Edition,Van Nostrand Reinhold, New York, (1991).

25. Attarnejad, R., "On the derivation of the geometric stiffness and consistent mass matrices for non-prismatic Euler-Bernoulli beam elements", In proceedings of European Congress On Computational Meth. in Appl. Sci. and Engng., Barcelona, (2000).

26. Attarnejad, R.,"Free vibration of Non-Prismatic Beams.", In Proceedings of 15th ASCE Engng. Mech. Conf., New York, (2002).